соответствующей связности $C_1(\overset{(1)}{\Delta}{}^{p}_{m,2})$ переходит в параллельную двумерную площадку.

4. Образы площадки $L_2^p$ в точке $A\in S^{II}_{m,m+2}\subset E_{m+2}$, $m=2s$, при соответствующих аффинных отображениях связности $C^p(\overset{(2)}{\Delta}{}^{p}_{m,2})$ при каждом $p=\overline{1,s}$, $m=2s$, переходят в соответствующие точки. Если при фиксированном $p$ кручение связности $C^p(\overset{(2)}{\Delta}{}^{p}_{m,2})$ равно нулю, то эта связность локально плоская.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Классификация Коши–Римана многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 321. – № 2. – С. 5–9.
2. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А., Молдованова Е.А. Отображения Коши–Римана двумерных площадок касательного и нормального расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2012. – Т. 320. – № 2. – С. 5–8.
3. Ивлев Е.Т. О многообразии в n-мерном проективном пространстве $P_n$ ($m>2$; $n<m(m+1)$) // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6.– С. 1307–1320.
4. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.
5. Евтушек Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки. Сер. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – Т. 9. – С. 3–246.
6. Ивлев Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразия фигур: Межвуз. темат. сб. научн. трудов. – Калининград: Калининградский ун-т, 1982. – Вып. 15.– С. 32–37.

*Поступила 02.12.2011 г.*

УДК 517.956

# НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

У.Д. Молдояров

Ошский государственный университет, Кыргызстан
E-mail: ular_osh@rambler.ru

*Методом интегральных уравнений и сжимающих отображений доказана однозначная разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка.*

***Ключевые слова:***
*Нелокальная задача, интегральные условия, интегро-дифференциальное уравнение, сжимающее отображение, неподвижная точка, однозначная разрешимость*

***Key words:***
*Non-local problem, the integral conditions, integro-differential equation, a contraction mapping, fixed point, a unique solution, the Riemann function, the norm of the operator.*

**1. Постановка задачи.** Нелокальные задачи с интегральными условиями возникают при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания недоступна для непосредственных измерений. Например, математическое моделирование процессов распространения тепла [1, 2], процессы влагопереноса в капиллярно-пористых средах [3] приводятся к таким задачам. Нелокальные задачи с интегральными условиями для уравнений с частными производными изучены в работах [4–6].

Рассмотрим уравнение

$$u_{xxy}=F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy}) \qquad (1)$$

в области $D=\{(x,y)\colon 0<x<l,\ 0<y<h\}$, где $F$ – заданная функция.

Уравнение (1) представляет собой канонический вид уравнения в частных производных третьего порядка относительно старших производных по классификации работы [7], когда уравнение характеристик имеет один двукратный и один простой действительные характеристики.

Пусть $C^{m+n}(D)$ означает класс функций, имеющих непрерывные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}\ (i=0,\ldots,m;\ j=0,\ldots,n).$$

**Задача 1.** Требуется найти решение $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{2+1}(D)$ ур. (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h, \qquad (2)$$

$$u_x(0,y)+\int_0^{\ell} T_1(x,y)u(x,y)dx=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \qquad (3)$$

$$u(x,0)+\int_0^h T_2(x,y)u(x,y)dy=\psi(x),\ 0\le x\le \ell, \quad (4)$$

где $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\psi_2(x,y)$, $T_1(x,y)$, $T_2(x,y)$ – заданные функции.

В случае, когда $T_1(x,y)\equiv 0$, задача 1 изучена в работе [8].

Пусть выполняются условия:

1) $\varphi_i(y)\in C^1[0,h]$ $(i=1,2)$, $\psi(x)\in C^2[0,l]$;

2) $T_i(x,y)\in C(\overline{D})(i=1,2,)\ \ T_1(x,y)\in C^{0+1}(D)$,

$T_2(x,y)\in C^{2+0}(D)$;

3) $\varphi_1(0)+\int_0^h T_2(0,y)\phi_1(y)dy=\psi(0)$;

4) $F(x,y,u,p,q,r,s)\in C(\overline{D}\times R^5)$,

$\max\left|F(x,y,u,p,q,r,s)\right|\le H$,

$R^5$ – пятимерное пространство переменных $(u,p,q,r,s)$;

5) $\left|F(x,y,u,p,q,r,s)-F(x,y,\overline{u},\overline{p},\overline{q},\overline{r},\overline{s})\right|\le$

$\le L(\left|u-\overline{u}\right|+\left|p-\overline{p}\right|+\left|q-\overline{q}\right|+\left|r-\overline{r}\right|+\left|s-\overline{s}\right|)$.

**2. Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений**. Введем обозначение

$$\tau(x)=\psi(x)-\int_0^h T_2(x,y)u(x,y)dy,$$

$$g(y)=\varphi_2(y)-\int_0^\ell T_1(x,y)u(x,y)dx.$$

Тогда решение ур. (1), удовлетворяющее условию (2) и условиям

$u_x(0,y)=g(y)$, $0<y<h$, $u(x,0)=\tau(x)$, $0<x<l$,

представимо в виде

$$u(x,y)=\tau(x)+\varphi_1(y)-\varphi_1(0)+[g(y)-g(0)]\,x=$$

$$=\int_0^x d\xi\int_0^y \upsilon(x,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta,$$

где $\upsilon(x,\xi)=x-\xi$ – функция Римана.

Отсюда, подставляя значения $\tau(x)$ и $g(y)$, получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x,y)=\Phi(x,y)-\int_0^\ell xT_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-$$

$$-\int_0^h T_2(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^\ell d\xi\int_0^h xT_1(\xi,0)T_2(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_0^y \vartheta(x,\xi)F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta, \quad (5)$$

где

$$\Phi(x,y)=\psi(x)+\varphi_1(y)-$$

$$-\varphi_1(0)+[\varphi_2(y)-\varphi_2(0)]x+\int_0^\ell xT_1()\xi,0\psi(\xi)\,d\xi.$$

Чтобы получить замкнутую систему уравнений из (5) найдем производные

$$u_x(x,y)=\Phi_x(x,y)-\int_0^\ell T_1(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-$$

$$-\int_0^h T_{2x}(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-\int_0^h T_2(x,\eta)u_x(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^\ell d\xi\int_0^h T_1(\xi,0)T_2(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_0^y F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta,u_{\xi\xi},u_{\xi\eta})d\eta; \quad (6)$$

$$u_y(x,y)=\Phi_y(x,y)-\int_0^\ell xT_{1y}(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-$$

$$-\int_0^\ell xT_1(\xi,y)u_y(\xi,y)d\xi+$$

$$+\int_0^x \vartheta(x,\xi)F(\xi,y,u(\xi,y),u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi; \quad (7)$$

$$u_{xx}(x,y)=\Phi_{xx}(x,y)-\int_0^h T_{2xx}(x,\eta)u(x,\eta)d\eta-$$

$$-2\int_0^h T_{2x}(x,\eta)u_x(x,\eta)d\eta-\int_0^h T_2(x,\eta)u_{xx}(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^y F(x,\eta,u(x,\eta),u_x,u_\eta,u_{xx},u_{x\eta})d\eta; \quad (8)$$

$$u_{xy}(x,y)=\Phi_{xy}(x,y)-\int_0^\ell T_{1y}(\xi,y)u(\xi,y)d\xi-$$

$$-\int_0^\ell T_1(\xi,y)u_y(\xi,y)d\xi+$$

$$+\int_0^x F(\xi,y,u(\xi,y),u_\xi,u_y,u_{\xi\xi},u_{\xi y})d\xi. \quad (9)$$

Таким образом, решение задачи 1 сведено к решению систему уравнений (5)–(9).

**3. Решение системы уравнений методом сжимающих отображений.** С этой целью систему уравнений запишем в виде

$$g=Ag, \quad (10)$$

где $g=(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)$ – вектор-функция с компонентами $g_1=u(x,y)$, $g_2=u_x(x,y)$, $g_3=u_y(x,y)$, $g_4=u_{xx}(x,y)$, $g_5=u_{xy}(x,y)$, а оператор $A=(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ определяется на множестве функций $g=\in C(\overline{D})$ и его компоненты определяются с помощью равенствами (5)–(9):

$$A_i g\equiv g_{0i}+\int_0^\ell K_{i1}g_1(\xi,y)d\xi+\int_0^\ell K_{i2}g_3(\xi,y)d\xi+$$

$$+\int_0^h K_{i3}g_1(x,\eta)d\eta+\int_0^h K_{i4}g_2(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^h K_{i5}g_3(x,\eta)d\eta+\int_0^h K_{i6}g_4(x,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^x K_{i7}F(\xi,y,g_1(\xi,y),g_2,g_3,g_4,g_5)d\xi+$$

$$+\int_0^y K_{i8}F(x,\eta,g_1(x,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta+$$

$$\int_0^\ell d\xi\int_0^h K_{i9}g_1(\xi,\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_0^y K_{i0}F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)d\eta,\qquad(11)$$

где $K_{11}=-xT_1(\xi,y)$, $K_{12}\equiv0$, $K_{13}=-T_2(x,\eta)$, $K_{14}\equiv0$, $K_{15}\equiv0$, $K_{16}\equiv0$, $K_{17}\equiv0$, $K_{18}\equiv0$, $K_{19}=-xT_1(\xi,0)\ T_2(\xi,\eta)$, $K_{10}=\upsilon(\xi,\eta)$, $K_{21}=-T_1(\xi,y)$, $K_{22}\equiv0$, $K_{23}=-T_{2x}(x,\eta)$, $K_{24}=-T_2(x,\eta)$, $K_{25}\equiv0$, $K_{26}\equiv0$, $K_{27}\equiv0$, $K_{28}\equiv0$, $K_{29}=T_1(\xi,0)\ T_2(\xi,\eta)$, $K_{20}\equiv1$, $K_{31}=-xT_{1y}(\xi,y)$, $K_{32}=-xT_1(\xi,y)$, $K_{33}\equiv K_{34}\equiv0$, $K_{35}\equiv K_{36}\equiv0$, $K_{37}=\upsilon(x,\xi)$, $K_{38}\equiv K_{39}\equiv K_{30}\equiv0$, $K_{41}\equiv K_{42}\equiv0$, $K_{43}=-T_{2xx}(x,\eta)$, $K_{44}=-2T_{2x}(x,\eta)$, $K_{45}\equiv0$, $K_{46}=-T_2(x,\eta)$, $K_{47}\equiv0$, $K_{48}\equiv1$, $K_{49}\equiv0$, $K_{40}\equiv0$, $K_{51}=-T_{1y}(\xi,y)$, $K_{52}=-T_1(\xi,y)$, $K_{53}\equiv K_{54}\equiv K_{55}\equiv K_{56}\equiv0$, $K_{57}\equiv1$, $K_{58}\equiv0$, $K_{59}\equiv K_{50}\equiv0$, а $g_{01}=\Phi(x,y)$, $g_{02}=\Phi_x(x,y)$, $g_{03}=\Phi_y(x,y)$, $g_{04}=\Phi_{xx}(x,y)$, $g_{05}=\Phi_{xy}(x,y)$, компоненты вектора $g_0=(g_{01},g_{02},g_{03},g_{04},g_{05})$.

Норму $g$ определим равенством

$$\|g\|=\max_{1\le i\le5}\max_{(x,y)\in\overline{D}}(g_i(x,y)).$$

В силу свойств заданных функций (1, 2) заключаем, что

$$\exists M>0\ \forall(x,y)\in\overline{D}:\|g_0\|\le M.$$

Пусть оператор $A$ осуществляет отображение шара

$$S(g_0,M)=\{g:\|g-g_0\|\le M\}.$$

Тогда

$$\forall g\in S(g_0,M):\|g\|\le 2M.$$

В силу свойств заданных функций (1)–(4) также заключаем, что

$$\exists T>0\ \forall(x,y)\in\overline{D}:\max|K_{ij}|\le T,$$

$$T=\mathrm{const},\ i=\overline{1,5},\ j=\overline{0,9}.$$

Пусть выполняется условие

$$Q(\ell,h)=T(2\ell+4h+\ell h)\left(2+5L+\frac{H}{M}\right)<1.\qquad(12)$$

Покажем, что при выполнении условия (12) оператор $A$ осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0,M)$ в себя. Пусть $g\in S(g_0,M)$. Тогда из (11) следует, что $Ag\in C(\overline{D})$ и, кроме того, справедливо неравенство

$$|A_ig-g_{0i}|\le\int_0^\ell|K_{i1}||g_1(\xi,y)|d\xi+$$

$$+\int_0^\ell|K_{i2}||g_3(\xi,y)|d\xi+\int_0^h|K_{i3}||g_1(x,\eta)|d\eta+$$

$$+\int_0^h|K_{i4}||g_2(x,\eta)|d\eta+\int_0^h|K_{i5}||g_3(x,\eta)|d\eta+$$

$$-\int_0^h|K_{i6}||g_4(x,\eta)|d\eta+$$

$$+\int_0^x|K_{i7}||F(\xi,y,g_1(\xi,y),g_2,g_3,g_4,g_5)|d\xi+$$

$$+\int_0^y|K_{i8}||F(x,\eta,g_1(x,\eta),g_2,g_3,g_4,g_5)|d\eta+$$

$$+\int_0^\ell d\xi\int_0^h|K_{i9}||g_1(\xi,\eta)|d\eta+$$

$$+\int_0^x d\xi\int_0^y|K_{i0}||F(\xi,\eta,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5)|d\eta<$$

$$<T(2M+H)(2\ell+4h+\ell h).$$

Тогда

$$\|Ag-g_0\|=\max_{1\le i\le5}\max_{(x,y)\in\overline{D}}|A_ig-g_{0i}|<$$

$$<T(2M+H)(2\ell+4h+\ell h)=$$

$$=T\left(2+\frac{H}{M}\right)(2\ell+4h+\ell h)<Q(\ell,h)M.$$

Отсюда заключаем, что при выполнении условия (12) имеет место неравенство

$$\|Ag-g_0\|<Q(\ell,h)M<M.$$

Это означает, что оператор $A$ отображает шар в себя, т. е. $Ag\in S(g_0,M)$. Теперь покажем, что оператор $A$ при выполнении условия (12) является сжимающим отображением. Пусть $g^{(1)}=(g_1^{(1)},g_2^{(1)},g_3^{(1)},g_4^{(1)},g_5^{(1)})$, $g^{(2)}=(g_1^{(2)},g_2^{(2)},g_3^{(2)},g_4^{(2)},g_5^{(2)})$ произвольные два вектора, принадлежащие шару $S\,(g_0,M)$. Тогда из условия (5) следует, что $\forall g^{(1)}, g^{(2)}\in S(g_0,M)$:

$$\left|\begin{matrix}F(x,y,g_1^{(1)},g_2^{(1)},g_3^{(1)},g_4^{(1)},g_5^{(1)})-\\-F(x,y,g_1^{(2)},g_2^{(2)},g_3^{(2)},g_4^{(2)},g_5^{(2)})\end{matrix}\right|\le$$

$$\le L\sum_{i=1}^5|g_i^{(1)}-g_i^{(2)}|\le5L\|g^{(1)}-g^{(2)}\|.$$

Используя это условие из (11) получим

$$|A_ig^{(1)}-A_ig^{(2)}|\le T(2\ell+4h+\ell h)(1+5L)\|g^{(1)}-g^{(2)}\|,\ i=\overline{1,5}.$$

Тогда

$$\|Ag^{(1)}-Ag^{(2)}\|\le T(2\ell+4h+\ell h)(1+5L)\|g^{(1)}-g^{(2)}\|<$$

$$<Q(\ell,h)\|g^{(1)}-g^{(2)}\|.$$

Так как, в силу неравенства (12) $Q(\ell,h)<1$, то оператор $A$ осуществляет сжатое отображение шара $S(g_0,M)$ в себя. Тогда в силу теоремы С. Банаха [9] в шаре $S(g_0,M)$ существует, и притом только одна, неподвижная точка отображения, т. е. существует только одно решение ур. (10). Решая это уравнение, например, методом последовательных приближений, $g^{(1)}=(g_1^{(1)},g_2^{(1)},g_3^{(1)},g_4^{(1)},g_5^{(1)})$ можно однозначно определить все компоненты вектора $g$ и тем самым определить решение задачи 1 в области $D$ и установить, что построенное решение принадлежит классу $C^{2+1}(D)$. Таким образом, доказана

**Теорема.** Если выполняются условия (1)–(5) и (12), то система уравнений (5)–(9) определяет в области $D^*=\{(x,y):0<x<\ell^*,0<y<h^*\}$ единственное решение задачи 1, принадлежащее классу .

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. – V. 21. – P. 155–160.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 2. – С. 294–304.
3. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 1. – С. 72–81.
4. Жестков С.В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // Украинский математический журнал. – 1990. – Т. 42. – № 1. – С. 132–135.
5. Пулькина Л.С. Смешенная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки. – 2003. – Т. 74. – Вып. 3. – С. 435–445.
6. Бейлина Н.В. Нелокальная задача с интегральными условиями для псевдогиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественно-научная серия. – 2008. – № 2 (61). – С. 22–28.
7. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 1734–1745.
8. Сопуев А., Молдояров У.Д. Нелокальные краевые задачи для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка // Матер. Междунар. юбилейной научной конф., посвящ. 15-летию образования КРСУ. – Бишкек: КРСУ, 2008. – С. 188–192.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.


*Поступила 10.11.2011 г.*

УДК 519.63

# РАЗВИТИЕ МЕТОДА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.П. Зимин

Томский политехнический университет
E-mail: zimin@ido.tpu.ru

*Предложено развитие метода фазовой плоскости для анализа решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Такой анализ необходим на этапах алгоритмизации нелинейных краевых задач и верификации моделей. Обоснован выбор фазовых плоскостей для анализа решений краевой задачи о распределении параметров низкотемпературной плазмы термоэмиссионного преобразователя.*

***Ключевые слова:***
*Краевая задача, метод фазовой плоскости, низкотемпературная плазма, термоэмиссионный преобразователь энергии.*

***Key words:***
*Boundary value problem, method of phase plane, low-temperature plasma, thermionic converter.*

## Введение

Первая фаза вычислительного эксперимента (ВЭ) состоит из нескольких этапов: создание и исследование модели; её алгоритмизация; программирование алгоритма; сравнение модельных и экспериментальных результатов – верификации модели [1]. Эффективность исследования и алгоритмизации модели зависит от выбора адекватных математических методов её анализа. Например, на этапе алгоритмизации традиционно применяют один из математических методов, который позволяет построить алгоритм преобразования непрерывной модели в дискретную, пригодную для анализа на ПЭВМ. Вместе с тем, на первых двух этапах ВЭ важным является определение области допустимых решений модели, выявление и изучение общих характерных свойств этих решений, которые необходимо учитывать при алгоритмизации.

Кроме этого, остается окончательно не решенной проблема выбора критериев сравнения модельных и экспериментальных результатов на этапе верификации модели. Этот этап ВЭ существенным образом влияет как на фазу калибровки модели, так и на фазу прогноза: он должен давать направление модификации модели и определять обоснованность экстраполяции результатов моделирования.

Все это вместе взятое требует поиска новых и развитие имеющихся методов анализа математических моделей. Для анализа решений задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на разных этапах ВЭ широко применяется метод фазовой плоскости [2–7]. Данная статья посвящена развитию метода фазовой плоскости, его применению к анализу решений краевой задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными (ДУЧП).

## Применение метода фазовой плоскости для краевых задач систем дифференциальных уравнений с частными производными

Понятия фазового пространства, связанных с ним структур, а также метод фазовой плоскости могут быть расширены и применены для краевой